Association d'éducation
Organisme d'intérêt général à caractère éducatif
Établissement libre d'enseignement supérieur

MATHÉMATIQUES I

(Option économique)

DURÉE : 4 heures – COEFFICIENT : 5

L'ÉPREUVE SE COMPOSE DE 4 EXERCICES INDÉPENDANTS

EXERCICE I

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = x^{\sqrt{x}}$ pour $x>0$ et $f(0) = 0$

et l'on désigne par (C) sa représentation graphique.

1°) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2°) Étudier la dérivabilité de f en 0.

3°) Étudier la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et en déduire la forme de la branche infinie correspondante pour (C).

4°) Montrer que pour $x>0$ f est dérivable. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$.

5°) Récapituler les résultats obtenus dans un tableau et tracer avec soin, la représentation graphique (C), dans un repère orthonormé dont l'unité sera prise égale à 5 cm.

6°) Étudier le signe de $f(x) - x$.

7°) On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0, strictement positif, et par la relation de récurrence :

$n \geqslant 0 \qquad u_{n+1} = f(u_n)$

En supposant que cette suite est convergente, quelles sont ses limites éventuelles ?

8°) Étudier la monotonie de cette suite, ainsi que la place de ses termes par rapport à 1 et conclure sur sa convergence éventuelle. On envisagera les trois cas : $u_0 = 1$, $u_0>1$, $u_0<1$, et l'on se servira des résultats obtenus aux questions 6 et 7.

EXERCICE II

On pose $A = \int_0^x e^t \cos 2t \, dt$ et $B = \int_0^x e^t \sin 2t \, dt$

1°) A l'aide d'intégrations par parties, calculer deux relations entre A et B. En déduire A et B.

2°) Soit alors $I = \int_0^x e^t \sin^2 t \, dt$ et $J = \int_0^x e^t \cos^2 t \, dt$

Calculer $I + J$, $J - I$, et en déduire I et J.

EXERCICE III

Justifier la convergence des deux intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\text{Log}(1+t)}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \qquad \text{et} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$$

EXERCICE IV

1°) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$

et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = 7 u_n + 8 u_{n-1}$

a) On pose $u_n = (-1)^n v_n$. Montrer que $v_n - v_{n-1}$ est géométrique. En déduire $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.

b) Calculer v_n, puis u_n, en fonction de n.

2°) Soit A la matrice carrée d'ordre 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et I la matrice unité d'ordre 3.

a) Calculer A^2 puis montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I.

b) Montrer que A est inversible et que A^{-1} est combinaison linéaire des matrices A et I. Écrire la matrice A^{-1}.

c) Montrer qu'il existe 2 suites réelles (a_n) et (b_n) telles que :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = a_n A + b_n I$

Que valent a_0, b_0, a_1, b_1 ?

d) Trouver une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite (a_n) et déterminer a_n puis b_n en fonction de n.

e) Écrire très nettement la matrice A^n.

page 314 INSTITUT SUPERIEUR de GESTION 1987 Opt économ.-Math 1